Fachhochschule Koblenz
Fachbereich Maschinenbau
Maschinendynamik SS 05
Prof. Dr. W. Kröber

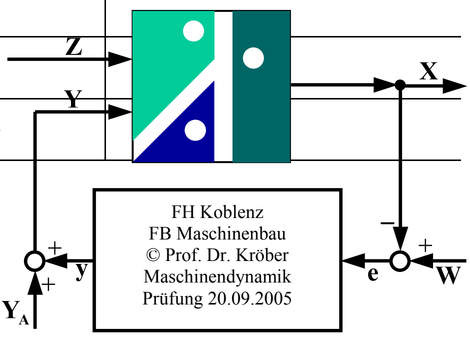
Name ______________________________

Matr.-Nr. ______________________

Zur Bewertung der Aufgaben muss der gesamte Lösungsteil ersichtlich sein.

- Bearbeitungszeit : 90 min
- Erlaubte Hilfsmittel :
  - Schreib- und Zeichengerät
  - Taschenrechner
  - Formelsammlung (11 Blätter)
  - aus der Technischen Mechanik:
    - Flächen- und Widerstandsmomente für die Biegung
    - Durchbiegungen und Neigungswinkel
    - Massenträgheitsmomente homogener Körper

Aufgabe	erreichte Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Summe	



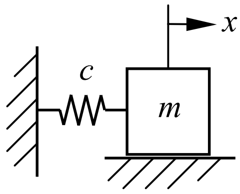
Note : ______________________________

Aufgabe 1 (14P)

Bei dem abgebildeten Schwingungssystem (Masse $m = 0{,}5\,kg$; Eigenfrequenz $f_0 = 4\,Hz$; reibungsfrei) werden zu einer bestimmten Zeit ("Momentaufnahme") folgende Größen gemessen:

momentane Auslenkung $x = +2\,mm$

momentane Schwinggeschwindigkeit $\dot{x} = +87\,mm/s$.



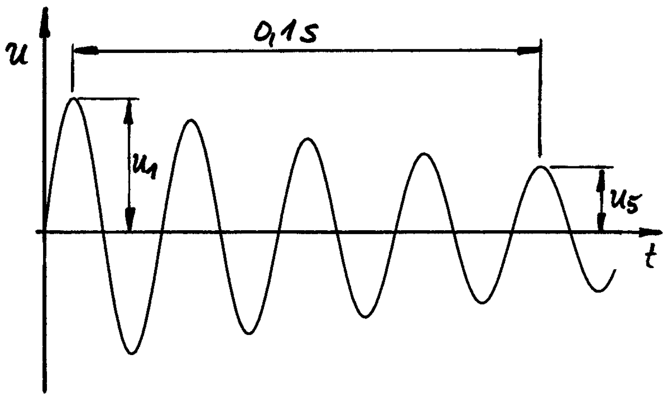
a. Zu bestimmen sind: (momentane) kinetische Energie, (momentane) potentielle Energie (Feder), Maximalwert der Amplitude, Maximalwert der Schwinggeschwindigkeit

b. Schätzen Sie anhand einer (halbwegs) maßstäblichen Skizze ab, wie viele Millisekunden nach der "Momentaufnahme" die maximale Auslenkung zum ersten Mal erreicht wird!

Aufgabe 2 (8P)

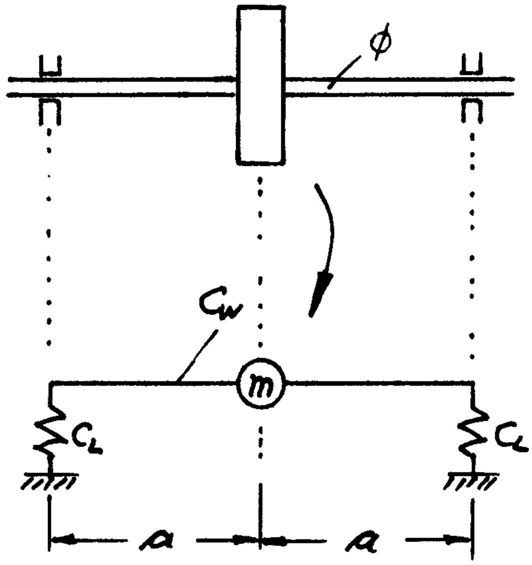
Bei einem Ausschwingversuch wird das Wegsignal durch eine proportionale Spannung von einem Messverstärker ausgegeben.
Gemessen werden $u_1 = 4\,V$ und $u_5 = 2\,V$.
Die Zeitdauer zwischen diesen Messzeitpunkten beträgt $0{,}1\,s$.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben das logarithmische Dekrement Λ, den Dämpfungsgrad ϑ, die Periodendauer T_d und die Abklingkonstante δ!



Aufgabe 3 (16P)

Auf der beidseitig gelagerten Welle (Durchmesser 40 mm) ist in der Mitte ein Zahnrad aufgeschrumpft.
Bestimmen Sie die biegekritische Drehzahl n_0 in [1/min] für die Welle!
Annahme: Die Masse der Welle kann gegenüber der Masse des Zahnrades vernachlässigt werden.
Daten:
a = 200 mm; c_{Lager} = 160 KN/mm
$m_{Zahnrad}$ = 17 kg ; E = 210000 N/mm^2



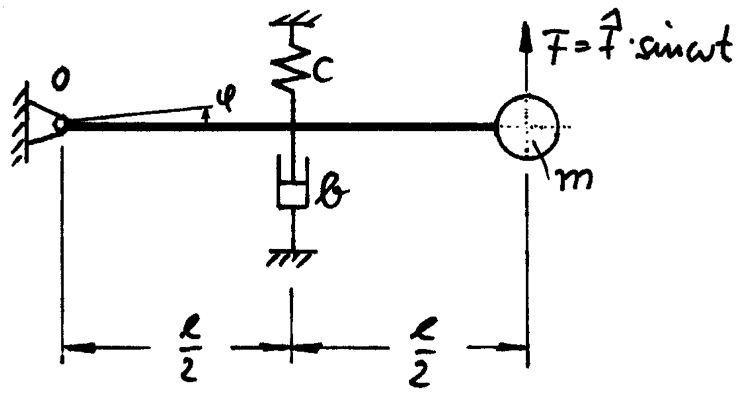
Aufgabe 4 (25P)

Bestimmen Sie die maximale Winkelauslenkung in [Grad], die sich bei der gegebenen Anordnung ergibt!
Annahme: starrer, masseloser Stab mit Punktmasse m

Zahlenwerte:
l = 300 mm ; m = 37,5 kg

c = 6 KN/mm ; b = $3000 \dfrac{N}{m/s}$

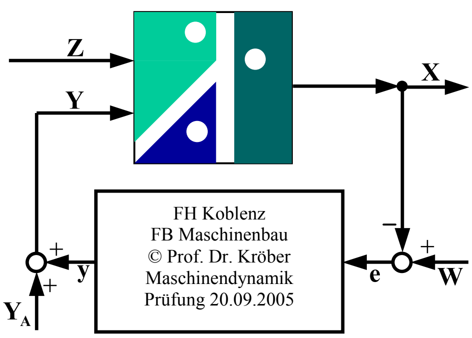
$\hat{F}$ = 3000 N ; ω = $100 s^{-1}$



Hilfestellungen:

$$J_0\ddot{\varphi} + b_D\dot{\varphi} + c_D\varphi = M \quad ; \quad M = \hat{M}\cdot\sin(\omega t) = \hat{F}\cdot l\cdot\sin(\omega t)$$

$$2\delta = \frac{b_D}{J_0} \quad ; \quad \omega_0{}^2 = \frac{c_D}{J_0} \quad ; \quad \vartheta = \frac{\delta}{\omega_0}$$

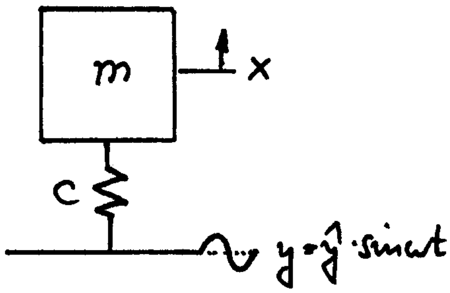


Aufgabe 5 (16P)

Durch eine elastische Lagerung soll die Schwingwirkung des Untergrundes (sinusförmig mit f = 30 Hz; Amplitude $\hat{y}$) nur in reduziertem Maße auf den Oberbau wirken. Im Auslegungsfall soll der Absolutschwingweg des Oberbaus 1/20 des Absolutschwingweges des Untergrundes betragen. Die Masse des Oberbaus beträgt 100 kg.

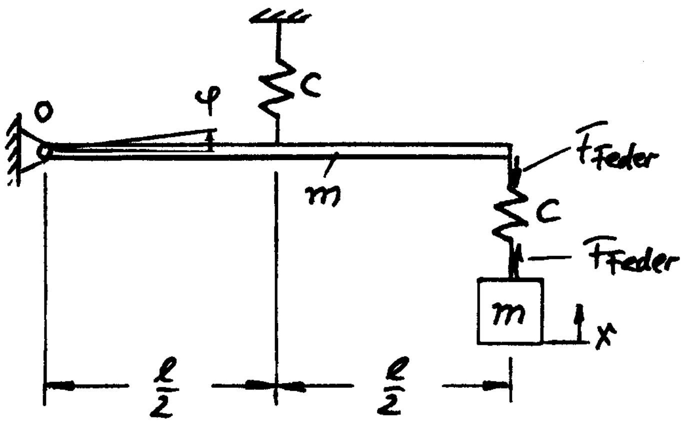
a. Zu bestimmen sind die Eigenfrequenz f_0, die Federsteifigkeit c und die statische Einsenkung des Oberbaus infolge des Eigengewichtes (g = 9,81 m/s²).

b. Wie groß ist der Maximalwert des Relativweges zwischen Untergrund und Oberbau? Hierbei sei $\hat{y}$ = 0,2 mm.



Aufgabe 6 (21P)

Das abgebildete Schwingungssystem besitzt 2 Freiheitsgrade. Durch die Anwendung des Drallsatzes für den Freiheitsgrad φ sowie der Anwendung des Ansatzes von Newton für den Freiheitsgrad x lassen sich für kleine Auslenkungen aus der statischen Ruhelage die beiden angegebenen Differentialgleichungen aufstellen.



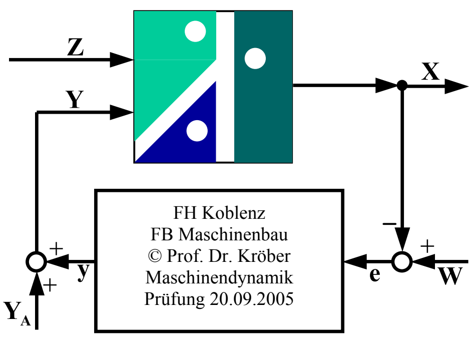
$$J_0\ddot{\varphi} = -c\left(\frac{l}{2}\right)^2 \varphi - l \cdot F_{Feder} \qquad m\ddot{x} = F_{Feder}$$

$$J_0 = \frac{1}{3} m l^2 \qquad F_{Feder} = (l \cdot \varphi - x) \cdot c$$

Hinweis: Die Masse des starren Drehstabes sei m.

Weisen Sie nach, dass die beiden Eigenfrequenzen nach der unten angegebenen Formel berechnet werden können!

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{19 \pm \sqrt{313}}{8} \cdot \frac{c}{m}}$$



Lösungen Maschinendynamik vom 20.09.05 Blatt 1

zu 1) a) $\underline{\underline{E_{kin}}} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{0{,}5}{2} \cdot 0{,}087^2 \, J = \underline{\underline{1892 \, \mu J}} \quad (\mu = 10^{-6})$

$$\omega_0^2 = (2 \cdot \pi \cdot f_0)^2 = \frac{c}{m} \Rightarrow c = m \, (2 \cdot \pi \cdot f_0)^2 = 0{,}5 \, (2 \cdot \pi \cdot 4)^2 \frac{N}{m} = 315{,}8 \, \frac{N}{m}$$

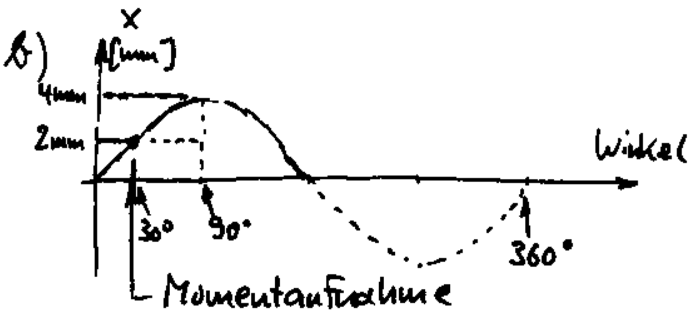
$$\underline{\underline{E_{pot}}} = \frac{c}{2} x^2 = \frac{315{,}8}{2} \cdot 0{,}002^2 \, J = \underline{\underline{631{,}7 \, \mu J}}$$

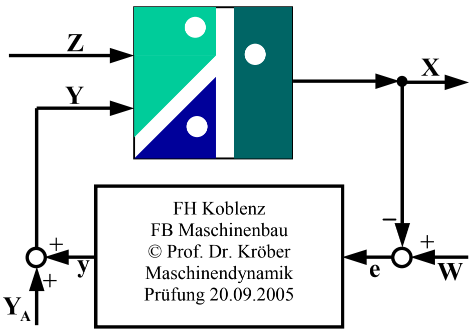
$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = (1892 + 632) \, \mu J = 2524 \, \mu J$$

$$E_{ges} = \frac{c}{2} \hat{x}^2 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{x}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{ges}}{c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2524 \cdot 10^{-6}}{315{,}8}} \, m = 3{,}998 \, mm \approx \underline{\underline{4{,}0 \, mm}}$$

$$E_{ges} = \frac{m}{2} \hat{\dot{x}}^2 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{\dot{x}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{ges}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2524 \cdot 10^{-6}}{0{,}5}} \, \frac{m}{s} = 0{,}1005 \, \frac{m}{s} \approx \underline{\underline{0{,}10 \, \frac{m}{s}}}$$

b)





$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{2mm}{4mm} \qquad 90° - 30°$$

Dreisatz: $\underbrace{\frac{60°}{360°}}_{1/6} = \frac{\Delta t}{T_0} = \Delta t \cdot f_0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\Delta t}} = \frac{1}{6 f_0} = \frac{1}{6 \cdot 4} s = \frac{1}{24} s = \underline{\underline{41{,}7 \, ms}}$

(Bem.: stimmt „sogar" exakt)

Detailalternative:

$$x = A \cdot \sin \omega_0 t + B \cdot \cos \omega_0 t$$

$$t = 0: \; x = x_0 \Rightarrow B = x_0$$

$$\dot{x} = A \, \omega_0 \cos \omega_0 t - B \omega_0 \sin \omega_0 t$$

$$t = 0: \; \dot{x} = v_0 \Rightarrow A = v_0 / \omega_0$$

also:

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t$$

$$\hat{x} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

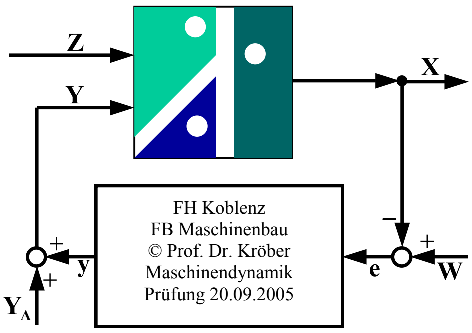
$$= \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + x_0^2}$$

$$\underline{\underline{}} = \sqrt{\left(\frac{0{,}087}{2 \cdot \pi \cdot 4}\right)^2 + 0{,}002^2} \; m \approx \underline{\underline{4{,}0 \, mm}}$$

$$\hat{\dot{x}} = \omega_0 \cdot \hat{x}$$

$$\underline{\underline{}} = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 0{,}004 \, \frac{m}{s} \approx \underline{\underline{0{,}10 \, \frac{m}{s}}}$$

Lösungen Maschinendynamik vom 20.09.05 Blatt 2



zu 2)

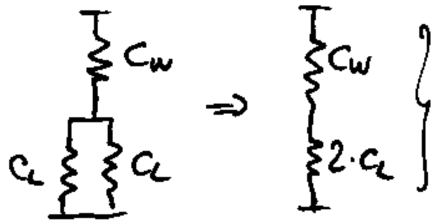
$$\underline{\underline{\Lambda}} = \frac{1}{n} \ln \frac{x_i}{x_{i+n}} = \frac{1}{4} \ln \frac{4V}{2V} = \underline{\underline{0{,}1733}}$$

$$\underline{\underline{\vartheta}} = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (2\pi)^2}} = \frac{0{,}1733}{\sqrt{0{,}1733^2 + (2\pi)^2}} = \underline{\underline{0{,}0276}}$$

$$\underline{\underline{T_d}} = \frac{0{,}1s}{4} = 0{,}025s = \underline{\underline{25ms}}$$

$$\Lambda = \delta \cdot T_d \Rightarrow \underline{\underline{\delta}} = \frac{\Lambda}{T_d} = \frac{0{,}1733}{0{,}025} s^{-1} = \underline{\underline{6{,}93 s^{-1}}}$$

zu 3) wegen Symmetrie direkt:



$$C_{ges} = \frac{(C_w) \cdot (2 \cdot C_L)}{(C_w) + (2 \cdot C_L)}$$

$$f = \frac{F \cdot l^3}{48EJ} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ c_w}}{c} = \frac{F}{f} = \frac{48 \cdot E J}{l^3} \; ; \; J = \frac{\pi}{64} d^4$$

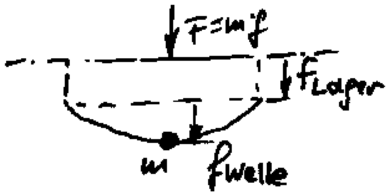
$$= \frac{48 \cdot E \frac{\pi}{64} d^4}{l^3} = \frac{48 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \frac{\pi}{64} 40^4}{400^3} \frac{N}{mm} = 19792 \frac{N}{mm}$$

$$C_{ges} = \frac{19792 \cdot 2 \cdot 160000}{19792 + 2 \cdot 160000} \frac{N}{mm} = 18639 \frac{N}{mm}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_{ges}}{m}} = 2 \cdot \pi \cdot f_0 = 2 \pi \frac{n_0}{60} = \frac{\pi \cdot n_0}{30} \Rightarrow n_0 = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{C_{ges}}{m}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{18639 \cdot 1000}{17}} \frac{1}{min}$$

$$= 9999 \frac{1}{min} \approx \underline{\underline{10000 \frac{1}{min}}}$$

Alternative (in Kurzform):



$$f_{ges} = f_{Lager} + f_{Welle} = \frac{F/2}{C_L} + \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}$$

$$= \frac{17 \cdot 9{,}81/2}{160 \cdot 10^3} mm + \frac{17 \cdot 9{,}81 \cdot 400^3}{48 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi}{64} 40^4} mm$$

$$= 8{,}947 \mu m$$

dann:

$$n_0 = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{ges}}}$$

$$= \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{9{,}81}{8{,}947 \cdot 10^{-6}}} \frac{1}{min}$$

$$= \underline{\underline{9999 \frac{1}{min}}}$$

Lösungen Maschinendynamik vom 20.09.05 Blatt 3

zu 4) $V_1 = \frac{\hat\varphi}{\hat\varphi_{stat}} = \frac{\hat\varphi}{\hat M / c_D} \Rightarrow \hat\varphi = V_1 \cdot \frac{\hat M}{c_D}$; $V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}$

$$\hat M = \hat F \cdot \ell = 3000\,N \cdot 0{,}3\,m = 900\,Nm$$

$$c_D = c\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 6\cdot 10^6 \frac{N}{m}\left(\frac{0{,}3\,m}{2}\right)^2 = 135000\ \frac{Nm}{1}\ \left(\frac{Nm}{rad}\right)$$

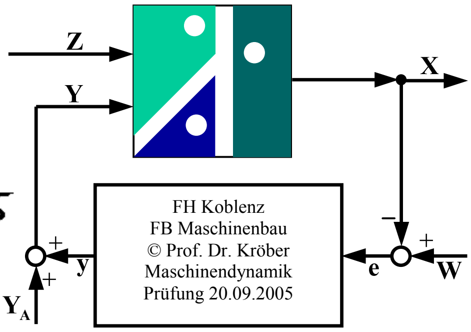
$$b_D = b\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 3000\ \frac{N}{m/s}\left(\frac{0{,}3\,m}{2}\right)^2 = 67{,}5\ \frac{Nm}{\frac{1}{s}}\ \left(\frac{Nm}{\frac{rad}{s}}\right)$$

$$J_0 = m\cdot\ell^2 = 37{,}5\,kg\,(0{,}3\,m)^2 = 3{,}375\ kgm^2$$

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{b_d}{J_0} = \frac{1}{2}\,\frac{67{,}5}{3{,}375}\,s^{-1} = 10\,s^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_D}{J_0}} = \sqrt{\frac{135000}{3{,}375}}\,s^{-1} = 200\,s^{-1}$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{100}{200} = 0{,}5 \quad ; \quad D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{10}{200} = 0{,}05$$



$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-0{,}5^2)^2+(2\cdot 0{,}05\cdot 0{,}5)^2}} = 1{,}330$$

$$\underline{\underline{\hat\varphi}} = V_1\cdot\frac{\hat M}{c_D} = 1{,}330\ \frac{900\,Nm}{135000\,\frac{Nm}{rad}}\cdot\frac{180^\circ}{\pi\,rad} = \underline{\underline{0{,}508^\circ}}$$

Alternativlösung (in Kurzform):

$$J_0\ddot\varphi + b_D\dot\varphi + c_D\varphi = M = F\cdot\ell$$

$$J_0(j\omega)^2\underline{\varphi} + b_D(j\omega)\underline{\varphi} + c_D\underline{\varphi} = \underline{F}\cdot\ell$$

ergibt:

$$\frac{\underline{\varphi}}{\underline{F}} = \frac{\ell}{J_0(j\omega)^2 + b_D(j\omega) + c_D}$$

Betrag:

$$\frac{\hat\varphi}{\hat F} = \frac{\ell}{\sqrt{(c_D - J_0\omega^2)^2 + (b_D\omega)^2}}$$

mit $c_D = c\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$; $J_0 = m\ell^2$; $b_D = b\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

$$\hat\varphi = \frac{\hat F\cdot\ell}{\sqrt{\left(c\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - m\ell^2\omega^2\right)^2 + \left(b\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\omega\right)^2}}$$

$$= \frac{3000\cdot 0{,}3}{\sqrt{\left(6\cdot 10^6\left(\frac{0{,}3}{2}\right)^2 - 37{,}5\cdot 0{,}3^2\cdot 100^2\right)^2 + \left(3000\left(\frac{0{,}3}{2}\right)^2\cdot 100\right)^2}}\ rad$$

$$= 8{,}869\cdot 10^{-3}\,rad$$

mal $180/\pi$ ergibt $\underline{\underline{\hat\varphi = 0{,}508^\circ}}$

zu 5) a) Fußpunkterregung: wegen $\eta > 1$ und $\vartheta = 0$ $\qquad V_2 = \frac{1}{\eta^2 - 1}$

$\Downarrow$

$V_2 \ll 1$

$$\eta^2 - 1 = \frac{1}{V_2} \Rightarrow \eta = \sqrt{1 + \frac{1}{V_2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1/20}} = \sqrt{21} = 4{,}583$$

$$\eta = \frac{f}{f_0} \Rightarrow f_0 = \frac{f}{\eta} = \frac{30\,\text{Hz}}{4{,}583} = \underline{\underline{6{,}546\,\text{Hz}}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} = (2\cdot\pi\cdot f_0)^2 \Rightarrow \underline{\underline{c}} = m\,(2\cdot\pi\cdot f_0)^2 = 100\,(2\cdot\pi\cdot 6{,}546)^2 \frac{N}{m} = \underline{\underline{169{,}2\cdot 10^3 \frac{N}{m}}}$$

$$c = \frac{m\cdot g}{x_{stat}} \Rightarrow \underline{\underline{x_{stat}}} = \frac{m\cdot g}{c} = \frac{100\cdot 9{,}81}{169{,}2\cdot 10^3}\,m = 5{,}799\,mm \approx \underline{\underline{5{,}80\,mm}}$$

b) „wie" seismische Wegmessung:

$$\frac{\hat{x}_{rel}}{\hat{y}} = V_3 = \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \quad (\eta > 1) \Rightarrow \hat{x}_{rel} = \hat{y}\,\frac{\eta^2}{\eta^2 - 1}$$

$4{,}583^2 = \sqrt{21}^2 = 21$

$$= 0{,}2\,mm\,\frac{4{,}583^2}{4{,}583^2 - 1}$$

$$= \underline{\underline{0{,}21\,mm}}$$

Bem.: Schwingung in Gegenphase

$$0{,}2\,mm - (\underbrace{-0{,}01\,mm}_{1/20 \text{ von } 0{,}2\,mm}) = 0{,}21\,mm$$

zu 6) $\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} = -\frac{c l^2}{4}\varphi - l(l\cdot\varphi - x)\cdot c$

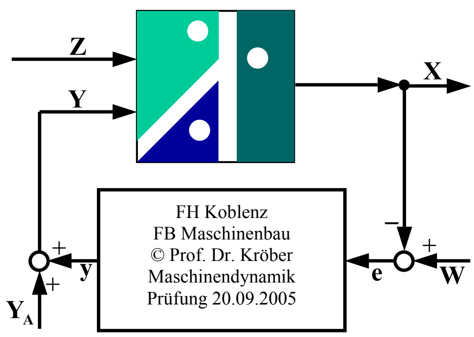
$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} = -\frac{1}{4} c l^2 \varphi - c l^2 \varphi + c l x$; $\quad \frac{1}{4} c l^2 \varphi + c l^2 \varphi = \frac{5}{4} c l^2 \varphi$

$$\boxed{\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} + \frac{5}{4} c l^2 \varphi - c\,l\,x = 0}$$

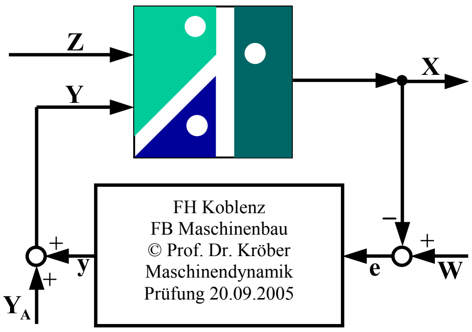
$m\ddot{x} = (l\varphi - x)\cdot c$

$m\ddot{x} = c l \varphi - c x$

$$\boxed{m\ddot{x} + c x - c l \varphi = 0}$$



Lösungen Maschinendynamik vom 20.09.05 Blatt 5



weiter zu 6)

in Matrizenschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}ml^2 & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{M}}}\begin{pmatrix}\ddot{\varphi}\\ \ddot{x}\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{5}{4}cl^2 & -cl\\ -cl & c\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{C}}}\begin{pmatrix}\varphi\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\det\left(\underline{\underline{C}}-\underline{\underline{M}}\omega^2\right)=\begin{vmatrix}\frac{5}{4}cl^2-\frac{1}{3}ml^2\omega^2 & -cl\\ -cl & c-m\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$\left(\frac{5}{4}cl^2-\frac{1}{3}ml^2\omega^2\right)(c-m\omega^2)-(-cl)(-cl)=0$$

$$\frac{5}{4}c^2\cancel{l^2}-\frac{5}{4}c\cancel{l^2}m\omega^2-\frac{1}{3}m\cancel{l^2}\omega^2c+\frac{1}{3}m^2\cancel{l^2}\omega^4-c^2\cancel{l^2}=0\ ;\quad \frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}\ ;\quad -\frac{5}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{19}{12}$$

$$\frac{1}{4}c^2-\frac{19}{12}cm\omega^2+\frac{1}{3}m^2\omega^4=0\ \Big|\cdot\frac{3}{m^2}$$

$$\omega^4-\frac{19}{4}\frac{c}{m}\omega^2+\frac{3}{4}\left(\frac{c}{m}\right)^2=0$$

$$\omega_{1,2}^2=\frac{19}{8}\frac{c}{m}\pm\sqrt{\left(\frac{19}{8}\frac{c}{m}\right)^2-\frac{3}{4}\left(\frac{c}{m}\right)^2}=\ldots=\frac{c}{m}\left(\frac{19}{8}\pm\frac{\sqrt{313}}{8}\right)$$

mit $\omega=\omega_0=2\cdot\pi\cdot f_0$ ergibt sich ... die gesuchte Formel

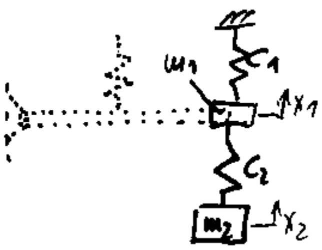
---

Alternativlösung: Auffassung als Drehschwingung $\varphi\to\varphi_1$; $\varphi_2=\frac{x}{l}$

$$\omega_{0_{1,2}}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{c_{D1}+c_{D2}}{J_1}+\frac{c_{D2}}{J_2}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_{D1}+c_{D2}}{J_1}+\frac{c_{D2}}{J_2}\right)^2-\frac{c_{D1}c_{D2}}{J_1J_2}}$$

wobei: $c_{D1}=c\left(\frac{l}{2}\right)^2$; $J_1=\frac{1}{3}ml^2$; $c_{D2}=cl^2$; $J_2=ml^2$

Weitere Alternativlösung: Beide Freiheitsgrade als „Längsschwinger"



hier: $x_2=x$; $m_2=m$

$$J_0=\frac{1}{3}ml^2\overset{!}{=}m_1\cdot l^2\Rightarrow m_1=\frac{m}{3}$$

$$c_{D1}=c\left(\frac{l}{2}\right)^2\overset{!}{=}c_1\cdot l^2\Leftrightarrow c_1=\frac{c}{4}$$

damit in: $$\omega_{0_{1,2}}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{c_1+c_2}{m_1}+\frac{c_2}{m_2}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1+c_2}{m_1}+\frac{c_2}{m_2}\right)^2-\frac{c_1c_2}{m_1m_2}}$$

Bem.: Die Alternativlösungen sind zwar interessant, jedoch sehr speziell. Der Lösungsweg über die Matrizen ist universeller!